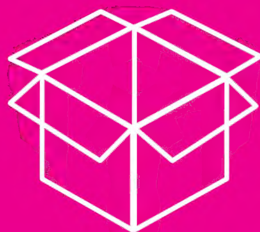
기하

이차곡선



김가현의
기출생각집



기하 이차곡선

1.

2007학년도 9월 평가원 가형 9번

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점 $(2\sqrt{3},0)$, $(-2\sqrt{3},0)$을 각각 F, F′이라 하자. 이 쌍곡선 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$ $(x>0)$에 대하여 선분 F′P 위의 점 Q가 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$를 만족시킬 때, 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는? [4점]

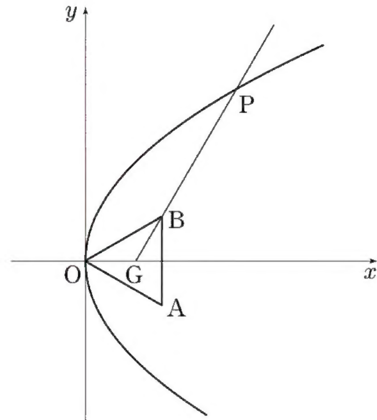
① π ② $\sqrt{3}\pi$ ③ 2π
④ 3π ⑤ $2\sqrt{3}\pi$

2.

2012학년도 6월 평가원 가형 29번

그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 OAB의 무게중심 G가 x축 위에 있다. 꼭짓점이 O이고 초점이 G인 포물선과 직선 GB가 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 선분 GP의 길이를 구하시오.

(단, O는 원점이다.) [4점]

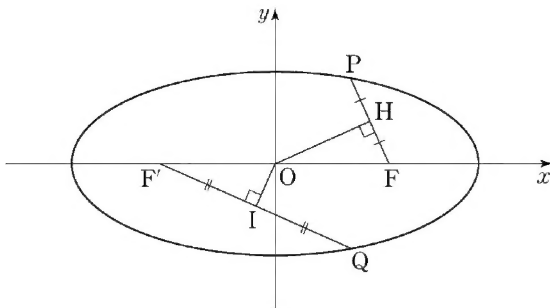




3.

2013학년도 6월 평가원 가형 27번

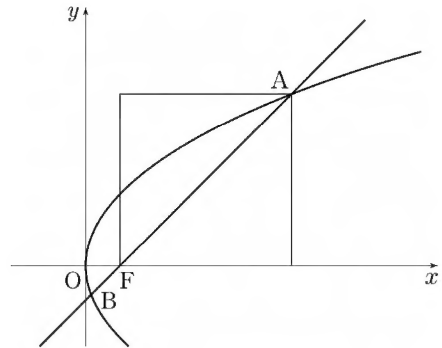
두 점 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$ 을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q 에 대하여 원점 O 에서 선분 PF 와 선분 QF'에 내린 수선의 발을 각각 H 와 I 라 하자. 점 H 와 점 I 가 각각 선분 PF 와 선분 QF' 의 중점이고, $\overline{OH} \times \overline{OI} = 10$ 일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l 이라 하자. l^2 의 값을 구하시오. (단, $\overline{OH} \neq \overline{OI}$) [4점]



4.

2013학년도 9월 평가원 가형 26번

그림과 같이 좌표평면에서 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 F인 포물선과 점 F를 지나고 기울기가 1인 직선이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AF를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이가 2일 때, 선분 AB의 길이는 $a + b\sqrt{2}$ 이다. $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) [4점]

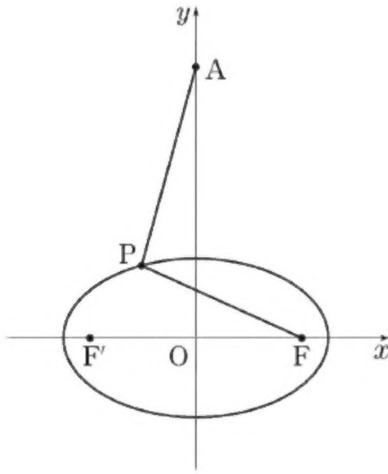




5.

2014학년도 수능 B형 27번

그림과 같이 y축 위의 점 $\mathrm{A}(0, a)$와 두 점 F, F'을 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{FP}}$의 최솟값이 1일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]



6.

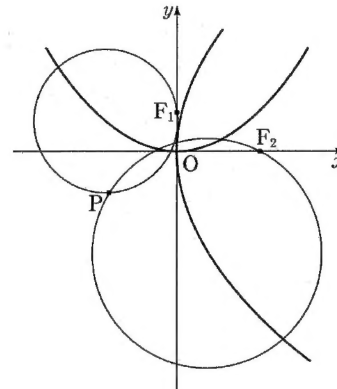
2015학년도 6월 평가원 B형 28번

좌표평면에서 포물선 $C_1 : x^2 = 4y$의 초점을 F_1, 포물선 $C_2 : y^2 = 8x$의 초점을 F_2라 하자. 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 중심이 C_1 위에 있고 점 F_1을 지나는 원과 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2를 지나는 원의 교점이다.

(나) 제 3사분면에 있는 점이다.

원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]

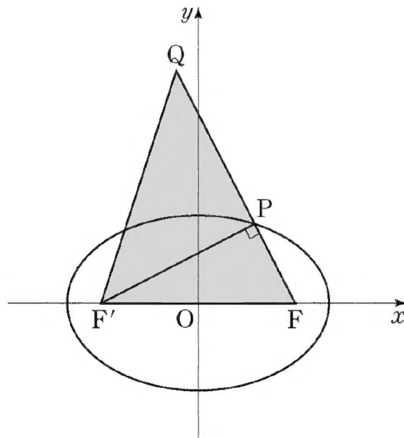




7.

2015학년도 수능 B형 27번

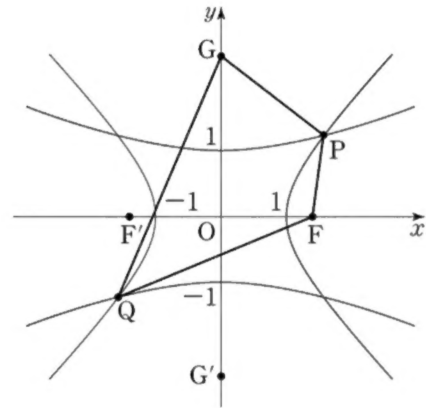
타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P를 $\angle \mathrm{FPF'}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 제 1사분면에서 잡고, 선분 FP의 연장선 위에 y좌표가 양수인 점 Q를 $\overline{\mathrm{FQ}}=6$이 되도록 잡는다. 삼각형 QF′F의 넓이를 구하시오. [4점]



8.

2016학년도 6월 평가원 B형 19번

그림과 같이 초점이 각각 F, F′과 G, G′이고 주축의 길이가 2, 중심이 원점 O인 두 쌍곡선이 제 1사분면에서 만나는 점을 P, 제 3사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PG}}\times\overline{\mathrm{QG}}=8$, $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{QF}}=4$일 때, 사각형 PGQF의 둘레의 길이는? (단, 점 F의 x좌표와 점 G의 y좌표는 양수이다.) [4점]



① $6+2\sqrt{2}$　② $6+2\sqrt{3}$　③ 10
④ $6+2\sqrt{5}$　⑤ $6+2\sqrt{6}$



9.

2016학년도 9월 평가원 B형 19번

두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 P는 제 1 사분면에 있다.
> (나) 삼각형 PF′F가 이등변삼각형이다.

삼각형 PF′F의 넓이를 a라 할 때, 모든 a의 값의 곱은? [4점]

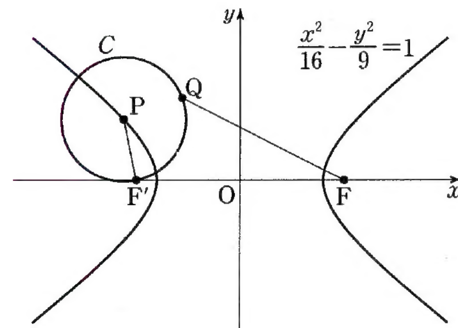
① $3\sqrt{77}$ ② $6\sqrt{21}$ ③ $9\sqrt{10}$
④ $21\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{105}$

10.

2017학년도 6월 평가원 가형 18번

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 이 쌍곡선 위의 점 P를 중심으로 하고 선분 PF′을 반지름으로 하는 원을 C라 하자.
원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 FQ의 길이의 최댓값이 14일 때, 원 C의 넓이는? (단, $\overline{PF'}<\overline{PF}$)

[4점]



① 7π ② 8π ③ 9π
④ 10π ⑤ 11π



11.

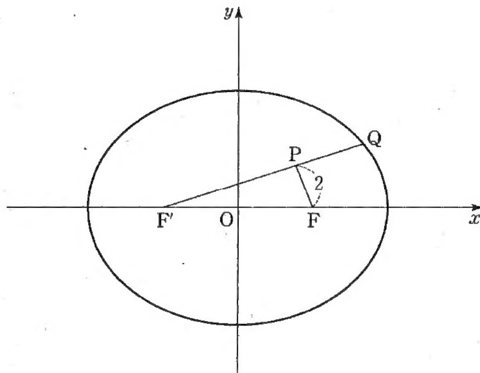
2017학년도 9월 평가원 가형 27번

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ 의 두 초점은 F, F'이고, 제1 사분면에 있는 두 점 P, Q는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{PF}}=2$

(나) 점 Q는 직선 PF'과 타원의 교점이다.

삼각형 PFQ의 둘레의 길이와 삼각형 $\mathrm{PF'F}$의 둘레의 길이의 합을 구하시오. [4점]



12.

2017학년도 수능 가형 28번

점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$ 이고 두 초점이 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$ $(c>0)$인 쌍곡선이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여
$\overline{\mathrm{PF}'}=30$, $16\le\overline{\mathrm{PF}}\le 20$이다.

(나) x좌표가 양수인 꼭짓점 A에 대하여
선분 AF의 길이는 자연수이다.

이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오. [4점]



13.

2017년 4월 교육청 가형 19번

좌표평면에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이고 한 초점이 $\mathrm{F}(4\sqrt{3},0)$이다. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 이 쌍곡선과 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　② $\sqrt{3}$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$　⑤ $2\sqrt{3}$

14.

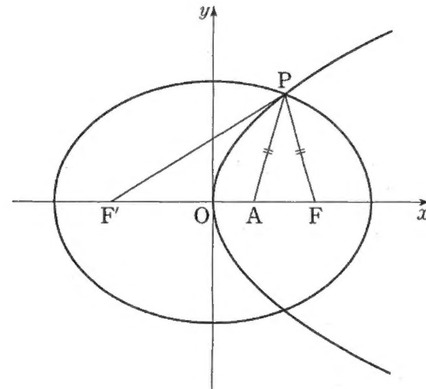
2018학년도 9월 평가원 가형 27번

좌표평면에서 초점이 $\mathrm{A}(a,0)$ $(a>0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$ $(c>a)$인 타원의 교점 중 제 1사분면 위의 점을 P라 하자.

$$\overline{\mathrm{AF}}=2,\ \overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}},\ \overline{\mathrm{FF}'}=\overline{\mathrm{PF}'}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{7}$ 이다. p^2+q^2 의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)

[4점]



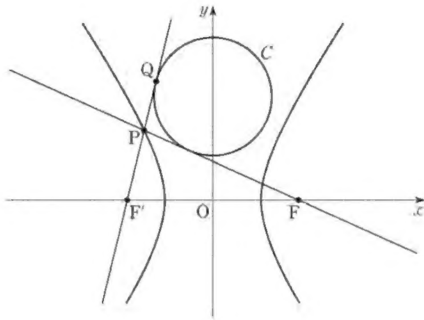


15.

2018학년도 수능 가형 27번

그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{17}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 $\mathrm{F'P}$에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다.

직선 $\mathrm{F'P}$와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=5\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{F'P}}<\overline{\mathrm{FP}}$) [4점]



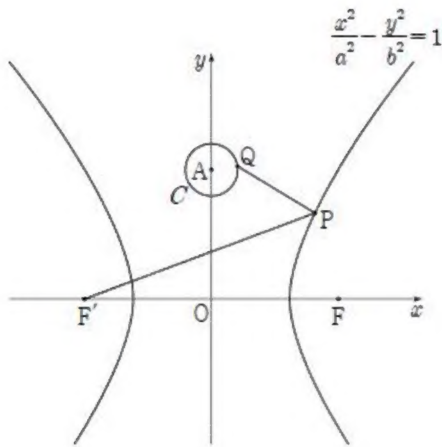


16.

2018년 4월 교육청 가형 28번

그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ ($c>0$)이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 점 $\mathrm{A}(0, 5)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 제 1사분면에 있는 쌍곡선 위를 움직이는 점 P와 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 최솟값이 12일 때, a^2+3b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.)

[4점]

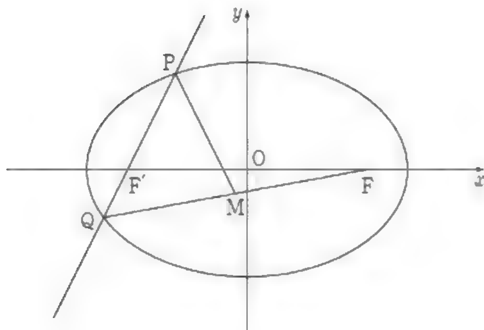




17.

2018년 7월 교육청 가형 28번

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F'}(-c,0)\ (c>0)$ 이라 하고 점 $\mathrm{F'}$ 을 지나는 직선이 타원과 만나는 두 점을 P, Q 라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=6$ 이고 선분 FQ 의 중점 M 에 대하여 $\overline{\mathrm{FM}}=\overline{\mathrm{PM}}=5$ 일 때, 이 타원의 단축의 길이를 구하시오. [4점]

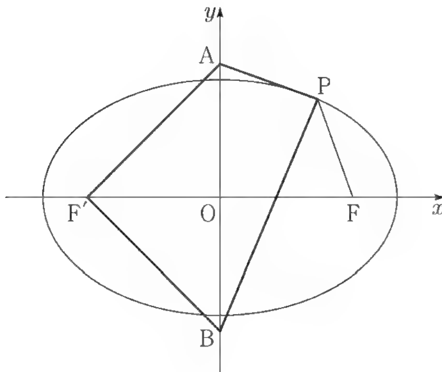




18.

2019학년도 9월 평가원 가형 27번

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(0, 3)$, $\mathrm{B}(0, -3)$에 대하여 두 초점이 F, F'인 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 P가 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PF}}$를 만족시킨다. 사각형 $\mathrm{AF'BP}$의 둘레의 길이가 $a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{PF'}}$이고, a, b는 자연수이다.) [4점]



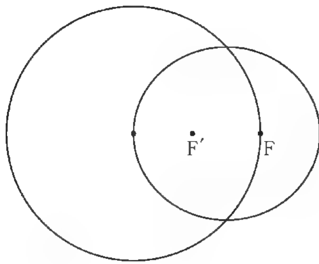


19.

2022학년도 6월 평가원 28번

두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$　③ $\sqrt{3}-1$　④ $2\sqrt{2}-2$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

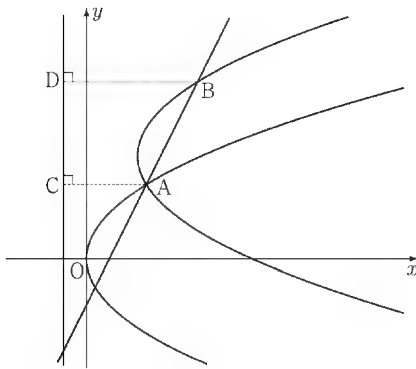




20.

2022학년도 6월 평가원 29번

포물선 $y^2 = 8x$와 직선 $y = 2x - 4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-2a)^2 = 8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y = 2x - 4$와 포물선 $(y-2a)^2 = 8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x = -2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{BD}} - \overline{\mathrm{AB}} = k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

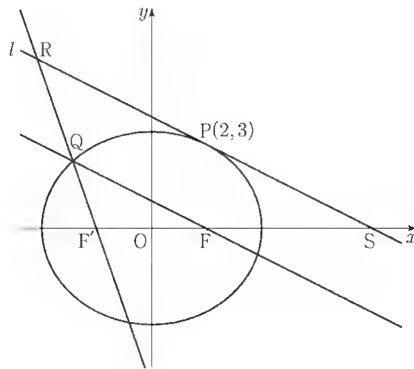




21.

2022학년도 9월 평가원 28번

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$에서 타원에 접하는 직선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 l과 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 Q라 하자. 두 직선 F′Q와 l이 만나는 점을 R, l과 x축이 만나는 점을 S라 할 때, 삼각형 SRF′의 둘레의 길이는? [4점]



① 30　② 31　③ 32　④ 33　⑤ 34

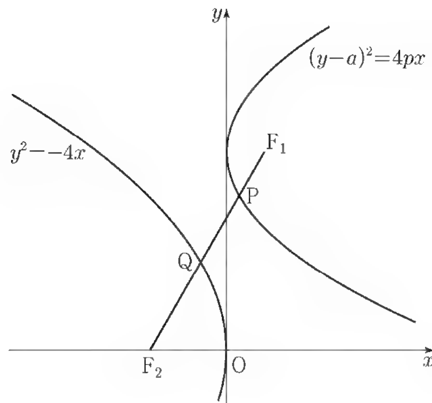


22.

2022학년도 수능 28번

두 양수 a, p에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점을 F_1이라 하고, 포물선 $y^2=-4x$의 초점을 F_2라 하자. 선분 $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$가 두 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}=3$, $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이다. a^2+p^2의 값은? [4점]

① 6　② $\frac{25}{4}$　③ $\frac{13}{2}$　④ $\frac{27}{4}$　⑤ 7





23.

2023학년도 6월 평가원 28번

좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 점 $\mathrm{A}(c,\ 0)$, $\mathrm{B}(-c,\ 0)\ (c>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3,\ 3)$일 때, 상수 c의 값은? [4점]

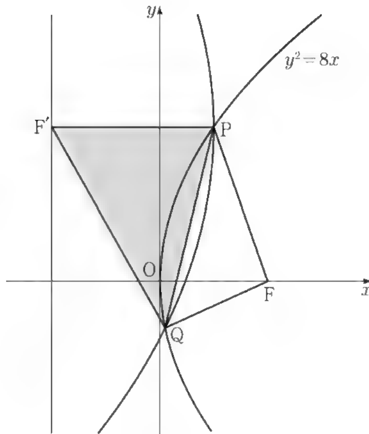
① $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$　② $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $\dfrac{9}{2}$　⑤ $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$



24.

2023학년도 6월 평가원 29번

초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제 1사분면에 있는 점 P를 지나고, x축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F′이라 하자. 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF′Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





25.

2023학년도 9월 평가원 28번

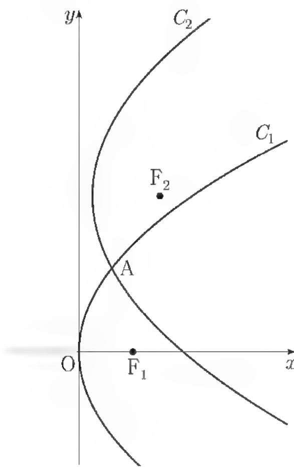
실수 $p(p \geq 1)$과 함수 $f(x) = (x+a)^2$에 대하여 두 포물선

$$C_1 : y^2 = 4x, \quad C_2 : (y-3)^2 = 4p\{x - f(p)\}$$

가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 두 포물선 C_1, C_2의 초점을 각각 F_1, F_2라 할 때, $\overline{\mathrm{AF}_1} = \overline{\mathrm{AF}_2}$를 만족시키는 p가 오직 하나가 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

① $-\dfrac{3}{4}$　② $-\dfrac{5}{8}$　③ $-\dfrac{1}{2}$

④ $-\dfrac{3}{8}$　⑤ $-\dfrac{1}{4}$





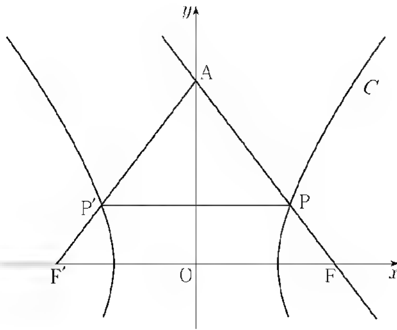
26.

2023학년도 수능 28번

두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$인 쌍곡선 C와 y축 위의 점 A가 있다. 쌍곡선 C가 선분 AF와 만나는 점을 P, 선분 AF′과 만나는 점을 P′이라 하자. 직선 AF는 쌍곡선 C의 한 점근선과 평행하고

$$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PP'}}=5:6,\quad \overline{\mathrm{PF}}=1$$

일 때, 쌍곡선 C의 주축의 길이는? [4점]



① $\dfrac{13}{6}$　② $\dfrac{9}{4}$　③ $\dfrac{7}{3}$　④ $\dfrac{29}{12}$　⑤ $\dfrac{5}{2}$



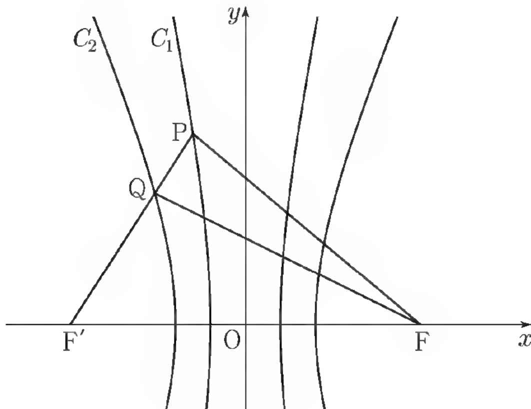
27.

2024학년도 6월 평가원 29번

두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 두 쌍곡선

$$C_1 : x^2-\frac{y^2}{24}=1,\ C_2 : \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$$

이 있다. 쌍곡선 C_1 위에 있는 제2사분면 위의 점 P에 대하여 선분 PF'이 쌍곡선 C_2와 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}$, $2\overline{\mathrm{PF}'}$, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 PQ의 기울기는 m이다. $60m$의 값을 구하시오. [4점]





28.

2024학년도 9월 평가원 29번

한 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)\ (c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$과 중심의 좌표가 $(2, 3)$이고 반지름의 길이가 r인 원이 있다. 타원 위의 점 P와 원 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF}}$ 의 최솟값이 6일 때, r의 값을 구하시오.

[4점]

29.

2024학년도 수능 29번

양수 c에 대하여 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위에 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점 P, Q가 존재하도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오.

[4점]

(가) 점 P는 제1사분면 위에 있고,
점 Q는 직선 PF' 위에 있다.

(나) 삼각형 $\mathrm{PF}'\mathrm{F}$는 이등변삼각형이다.

(다) 삼각형 PQF의 둘레의 길이는 28이다.



30.

2025학년도 6월 평가원 29번

좌표평면에 곡선 $|y^2-1|=\dfrac{x^2}{a^2}$ 과 네 점 $\mathrm{A}(0,\ c+1)$, $\mathrm{B}(0,\ -c-1)$, $\mathrm{C}(c,\ 0)$, $\mathrm{D}(-c,\ 0)$ 이 있다. 곡선 위의 점 중 y좌표의 절댓값이 1보다 작거나 같은 모든 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{PD}}=\sqrt{5}$ 이다. 곡선 위의 점 Q가 제1사분면에 있고 $\overline{\mathrm{AQ}}=10$ 일 때, 삼각형 ABQ의 둘레의 길이를 구하시오. (단, a와 c는 양수이다.)

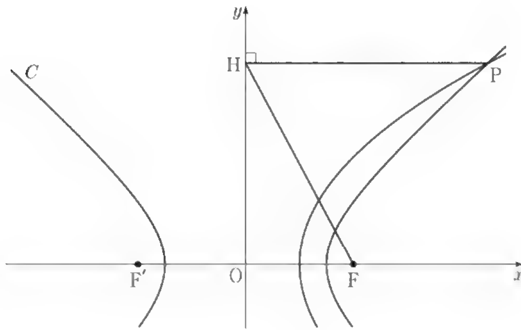
[4점]



31.

2025학년도 9월 평가원 29번

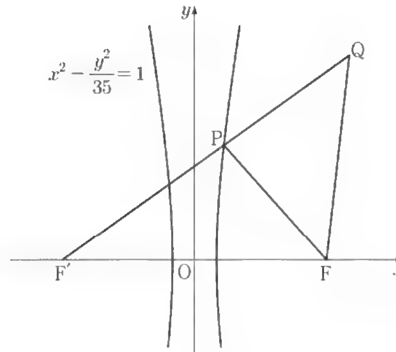
그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(4, 0)$, $\mathrm{F}'(-4, 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $C : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$이 있다. 점 F를 초점으로 하고 y축을 준선으로 하는 포물선이 쌍곡선 C와 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{PH}} : \overline{\mathrm{HF}} = 3 : 2\sqrt{2}$이다. $a^2 \times b^2$의 값을 구하시오. (단, $a > b > 0$) [4점]



32.

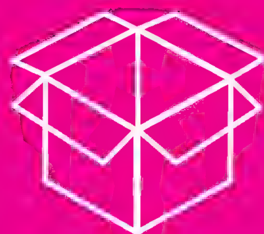
2025학년도 수능 29번

두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c > 0)$인 쌍곡선 $x^2 - \dfrac{y^2}{35} = 1$이 있다. 이 쌍곡선 위에 있는 제1사분면 위의 점 P에 대하여 직선 PF′ 위에 $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PF}}$인 점 Q를 잡자. 삼각형 QF′F와 삼각형 FF′P가 서로 닮음일 때, 삼각형 PFQ의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{PF'}} < \overline{\mathrm{QF'}}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



기하

평면벡터



김가현의
기출생각집



기하 평면벡터

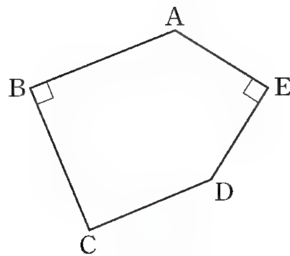
1.

2010학년도 수능 가형 14번

평면에서 그림의 오각형 ABCDE가

$$\overline{AB}=\overline{BC},\ \overline{AE}=\overline{ED},\ \angle B=\angle E=90°$$

를 만족시킬 때, 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



보기

ㄱ. 선분 BE 의 중점 M 에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$ 와 $\overrightarrow{AM}$은 서로 평행하다.

ㄴ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$

ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$

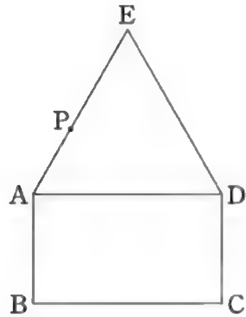
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



2.

2011학년도 9월 평가원 가형 14번

평면에서 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



보기

ㄱ. $|\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}$의 값은 일정하다.

ㄷ. $|\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$의 최솟값은 $\dfrac{7}{2}$이다.

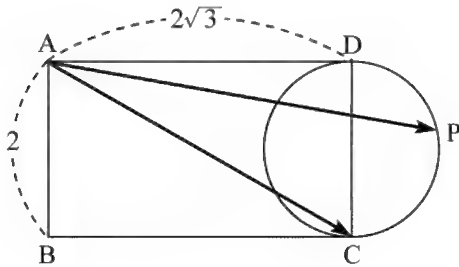
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



3.

2010년 10월 교육청 가형 11번

그림은 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD 와 이 직사각형의 한 변 CD 를 지름으로 하는 원을 나타낸 것이다. 이 원 위를 움직이는 점 P 에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$ 의 내적 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 의 최댓값은?
(단, 직사각형과 원은 같은 평면 위에 있다.) [4점]



① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

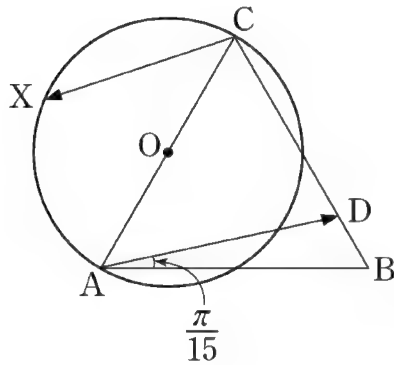


4.

2011학년도 수능 가형 22번

그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle \mathrm{DAB} = \frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자.

$\angle \mathrm{ACP} = \frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





5.

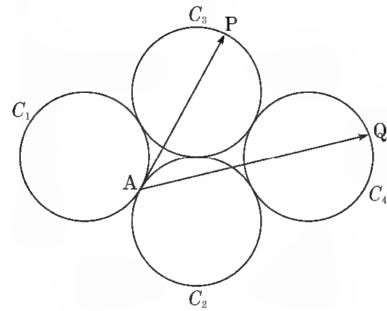
2013학년도 수능 가형 26번

한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 선분 AH 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

6.

2013년 10월 교육청 B형 21번

그림과 같이 평면 위에 반지름의 길이가 1인 네 개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4가 서로 외접하고 있고, 두 원 C_1, C_2의 접점을 A라 하자. 원 C_3 위를 움직이는 점 P와 원 C_4 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값은? [4점]



① $4\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ② 6 ③ $3\sqrt{3}+1$
④ $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ⑤ 7

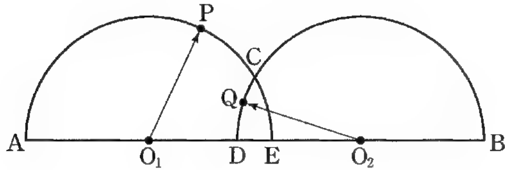


7.

2017학년도 6월 평가원 가형 28번

그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{DB}} = 2$인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{O_1A}} = \overline{\mathrm{O_2B}} = 1$인 두 점을 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$라 하자. 호 AC 위를 움직이는 점 P와 호 DC 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}} + \overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}\right|$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $1 < \overline{\mathrm{O_1O_2}} < 2$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

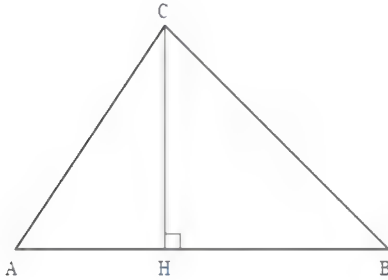




8.

2016년 7월 교육청 가형 19번

그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH}$ 의 값은? [4점]



(가) 점 H가 선분 AB를 $2:3$으로 내분한다.
(나) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$
(다) 삼각형 ABC의 넓이는 30이다.

① 36　② 37　③ 38
④ 39　⑤ 40

9.

2017학년도 9월 평가원 가형 16번

직사각형 ABCD의 내부의 점 P가

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CA}$$

를 만족시킨다. 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{CP}$
ㄴ. $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
ㄷ. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 직사각형 ABCD의 넓이는 8이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



10.

2018학년도 9월 평가원 가형 19번

좌표평면에서 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$에 대하여

$$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}| \leq 1 \text{이고 } \overrightarrow{\mathrm{OX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}_k} \geq 0 \quad (k=1, 2, 3)$$

을 만족시키는 모든 점 X의 집합이 나타내는 도형을 D라 하자. 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점]

보기

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$이면 D의 넓이는 $\frac{\pi}{2}$이다.

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_3} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$이면 D는 길이가 2인 선분이다.

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = 0$인 경우에, D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이면 점 A_3은 D에 포함되어 있다.

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



11.

2019학년도 9월 평가원 가형 16번

좌표평면 위의 두 점 $A(6, 0)$, $B(8, 6)$에 대하여 점 P가

$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}| = \sqrt{10}$$

을 만족시킨다.

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MQ}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{6\sqrt{10}}{5}$　② $\frac{9\sqrt{10}}{5}$　③ $\frac{12\sqrt{10}}{5}$

④ $3\sqrt{10}$　⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$



12.

2019학년도 수능 가형 29번

좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R이라 할 때,

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

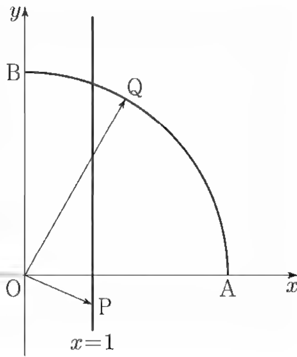


13.

2020학년도 6월 평가원 가형 18번

좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3)$과 직선 $x=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ \mathrm{a})$가 있다. 점 Q가 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(a)=5$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $-5\sqrt{3}$　② $-4\sqrt{3}$　③ $-3\sqrt{3}$　④ $-2\sqrt{3}$　⑤ $-\sqrt{3}$



14.

2020학년도 6월 평가원 가형 26번

좌표평면에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=10$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{A}(\mathrm{a},\ \mathrm{b})$에서의 접선을 l, 원점을 지나고 방향벡터가 $(1,\ 1)$인 직선을 m이라 하고, 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}$일 때, 두 수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, $a>b>0$이다.)

[4점]



15.

2020학년도 9월 평가원 가형 19번

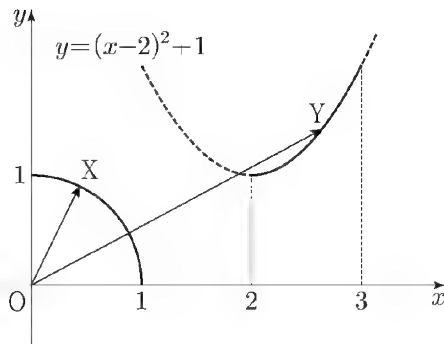
좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$이 있다.

중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직이는 점 X와 함수 $y=(x-2)^2+1$ $(2 \le x \le 3)$의 그래프 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역을 R라 하자.
점 O로부터 영역 R에 있는 점까지의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값은?
(단, O는 원점이다.) [4점]

① $16-2\sqrt{5}$ ② $16-\sqrt{5}$ ③ 16
④ $16+\sqrt{5}$ ⑤ $16+2\sqrt{5}$

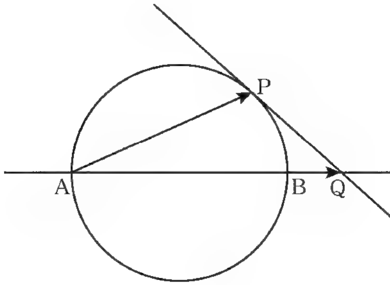




16.

2019년 10월 교육청 가형 27번

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에서의 접선과 직선 AB가 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 선분 AB를 5 : 1로 외분하는 점이고, $\overline{BQ}=\sqrt{3}$ 일 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값을 구하시오. [4점]



17.

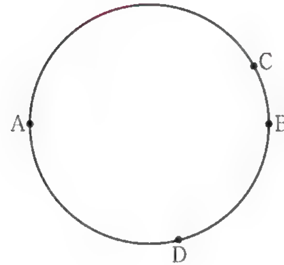
2020학년도 수능 가형 19번

한 원 위에 있는 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AD}|^2$의 값은? [4점]

(가) $|\overrightarrow{AB}|=8$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

(나) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40





18.

2022학년도 6월 평가원 30번

좌표평면 위의 네 점
A$(2,\ 0)$, B$(0,\ 2)$, C$(-2,\ 0)$, D$(0,\ -2)$를
꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점
P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}})(\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = 0$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \geq -2$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \geq 0$이다.
(다) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \geq -2$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \leq 0$이다.

점 R$(4,\ 4)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{RP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$의 최댓값을 M,
최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.) [4점]



19.

2022학년도 9월 평가원 30번

좌표평면에서 세 점 $\mathrm{A}(-3,\ 1)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=2,\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 P_0, Q_0이라 하자.

선분 AP_0 위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{BX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}_0}\geq 1$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{X}}|^2$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



20.

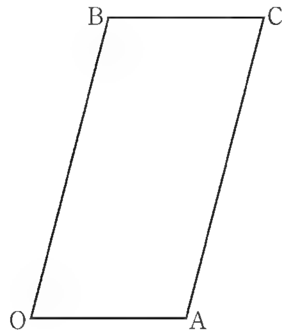
2022학년도 수능 29번

좌표평면에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}$ 이고 $\cos(\angle \mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$ 인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
> $(0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)

[4점]





21.

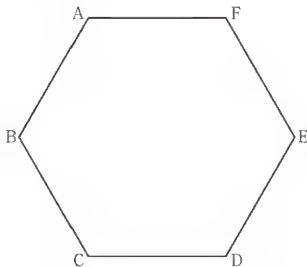
2023학년도 6월 평가원 30번

좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$

(나) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XD} = k\overrightarrow{CD}$

$\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하시오. [4점]





22.

2023학년도 9월 평가원 30번

좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$가 있다.

$$(|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|-2)(|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|-2)=0, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OX}}| \geq 2$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형 위를 움직이는 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\vec{u}=(1,\ 0)$에 대하여
> $(\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{u})(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \vec{u}) \geq 0$이다.
>
> (나) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$

$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



23.

2023학년도 수능 29번

평면 α 위에

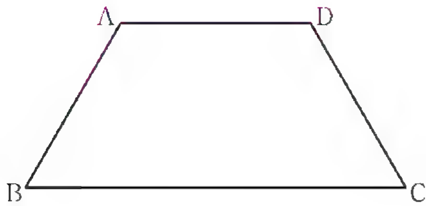
$$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AD}=2,\ \angle ABC=\angle BCD=\frac{\pi}{3}$$

인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DQ}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BP})$

(나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PQ}=6$

(다) $2\times\angle BQA=\angle PBQ<\frac{\pi}{2}$





24.

2024학년도 6월 평가원 28번

좌표평면의 네 점 A$(2, 6)$, B$(6, 2)$, C$(4, 4)$, D$(8, 6)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 X의 집합을 S라 하자.

(가) $\{(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{OC}\}\times\{|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC}|-3\}=0$

(나) 두 벡터 $\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OC}$가 서로 평행하도록 하는 선분 AB 위의 점 P가 존재한다.

집합 S에 속하는 점 중에서 y좌표가 최대인 점을 Q, y좌표가 최소인 점을 R이라 할 때, $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29



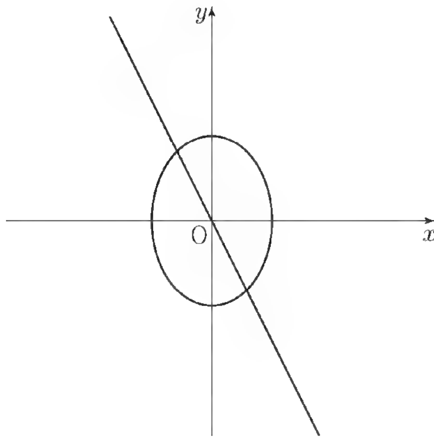
25.

2024학년도 6월 평가원 30번

직선 $2x+y=0$ 위를 움직이는 점 P와 타원 $2x^2+y^2=3$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$

를 만족시키고, x좌표와 y좌표가 모두 0 이상인 모든 점 X가 나타내는 영역의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





26.

2024학년도 9월 평가원 30번

좌표평면에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 APQ는 정삼각형이고,
> $9|\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PQ} = 4|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB}$이다.
> (나) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AQ} < 0$
> (다) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CB} = 24$

선분 AQ 위의 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점]



27.

2024학년도 수능 30번

좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점을 E, 선분 CA를 1 : 3으로 내분하는 점을 F라 하자. 네 점 P, Q, R, X가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{DP}|=|\overrightarrow{EQ}|=|\overrightarrow{FR}|=1$

(나) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{RA}$

$|\overrightarrow{AX}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하자. $16S^2$의 값을 구하시오. [4점]



28.

2025학년도 6월 평가원 28번

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 1)$에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 1,\ |\overrightarrow{\mathrm{BQ}}| = 3,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{QA}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}}) = 0$$

을 만족시킨다. $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BQ}}$의 값은?
(단, O는 원점이고, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| > 0$이다.) [4점]

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ $\frac{12}{5}$
④ 3 ⑤ $\frac{18}{5}$



29.

2025학년도 6월 평가원 30번

두 초점이 $\mathrm{F}(5, 0)$, $\mathrm{F}'(-5, 0)$이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 쌍곡선 위의 $\overline{\mathrm{PF}} < \overline{\mathrm{PF}'}$인 점 P에 대하여 점 Q가

$$(|\overrightarrow{\mathrm{FP}}|+1)\overrightarrow{\mathrm{F'Q}} = 5\overrightarrow{\mathrm{QP}}$$

를 만족시킨다. 점 $\mathrm{A}(-9, -3)$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값을 구하시오. [4점]



30.

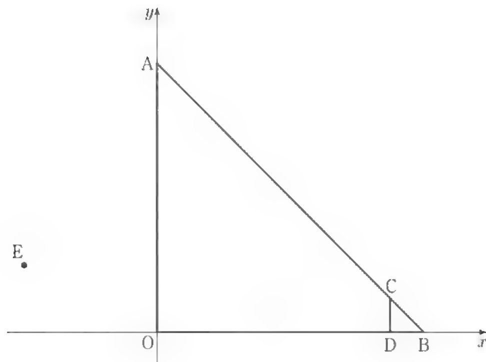
2025학년도 9월 평가원 30번

좌표평면 위에 다섯 점

$$A(0,\ 8),\ B(8,\ 0),\ C(7,\ 1),$$
$$D(7,\ 0),\ E(-4,\ 2)$$

가 있다. 삼각형 AOB의 변 위를 움직이는 점 P와 삼각형 CDB의 변 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OE}|^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

[4점]





31.

2025학년도 수능 30번

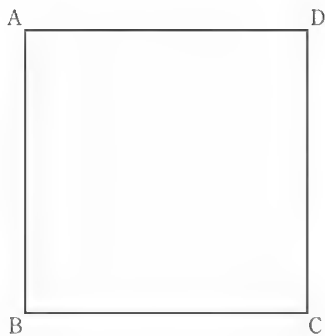
좌표평면에 한 변의 길이가 4 인 정사각형 ABCD 가 있다.

$$|\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}|=|\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XC}|$$

를 만족시키는 점 X 가 나타내는 도형을 S 라 하자.
도형 S 위의 점 P 에 대하여

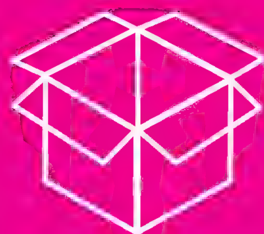
$$4\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PD}$$

를 만족시키는 점을 Q 라 할 때, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 하자.
$M\times m$ 의 값을 구하시오. [4점]



기하

공간도형과 공간좌표



김가현의
기출생각집

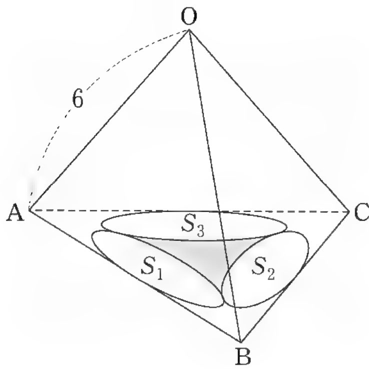


기하 공간도형과 공간좌표

1.

2008학년도 수능 가형 24번

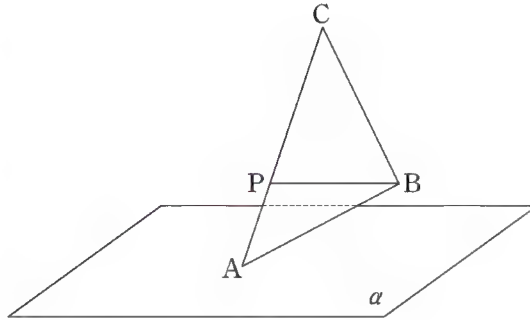
한 변의 길이가 6인 정사면체 OABC가 있다.
세 삼각형 △OAB, △OBC, △OCA에 각각 내접하는 세 원의 평면 ABC 위로의 정사영을 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. 그림과 같이 세 도형 S_1, S_2, S_3으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 할 때, $(S+\pi)^2$의 값을 구하시오. [4점]



2.

2012학년도 9월 평가원 가형 29번

그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고, α로부터의 거리가 각각 1, 3인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{BP}=4$이다.
삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오. [4점]



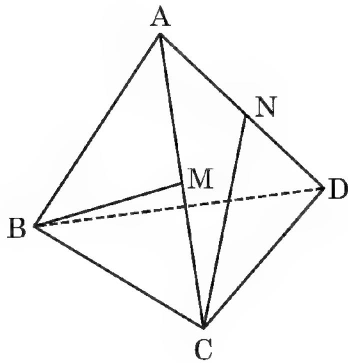


3.

2011년 10월 교육청 가형 30번

정사면체 ABCD 에서 두 모서리 AC, AD 의 중점을 각각 M, N 이라 하자. 직선 BM 과 직선 CN 이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta = \frac{q}{p}$ 이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



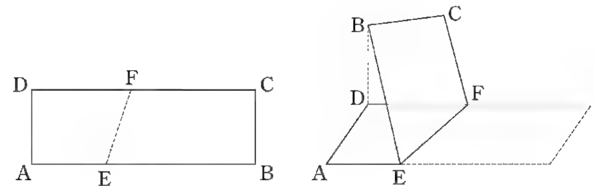
4.

2013학년도 수능 가형 28번

그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=3$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다. $\overline{AE}=3$일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ이다. $60\cos\theta$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)

[4점]

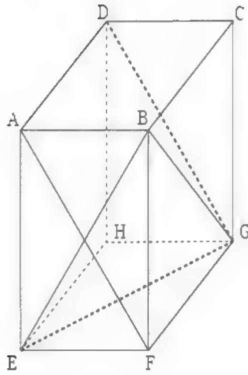




5.

2013년 7월 교육청 B형 19번

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=3$, $\overline{AE}=4$인 직육면체 ABCD − EFGH 에서 평면 AFGD 와 평면 BEG 의 교선을 l이라 하자. 직선 l과 평면 EFGH 가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$

④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

6.

2014학년도 9월 평가원 B형 15번

좌표공간에서

구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$ 과

구 $x^2+y^2+z^2+6x+2ay+2bz=0$ 이 원점에서

서로 접할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10



7.

2014학년도 수능 B형 19번

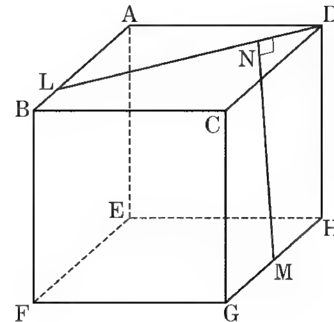
좌표공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수인 구 S가 x축과 y축에 각각 접하고, z축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π이고 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구 S의 반지름의 길이는? [4점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

8.

2013년 10월 교육청 B형 18번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 20인 정육면체 ABCD − EFGH가 있다. 모서리 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 L, 모서리 HG의 중점을 M이라 하자. 점 M에서 선분 LD에 내린 수선의 발을 N이라 할 때, 선분 MN의 길이는? [4점]



① $12\sqrt{3}$　② $8\sqrt{7}$　③ $15\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{29}$　⑤ $4\sqrt{30}$



9.

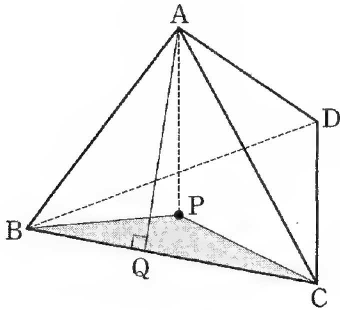
2016학년도 9월 평가원 B형 26번

그림과 같이

$$\overline{AB}=9,\ \overline{BC}=12,\ \cos(\angle ABC)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

인 사면체 ABCD에 대하여 점 A의 평면 BCD 위로의 정사영을 P라 하고 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\cos(\angle AQP)=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 일 때, 삼각형 BCP의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오.

[4점]

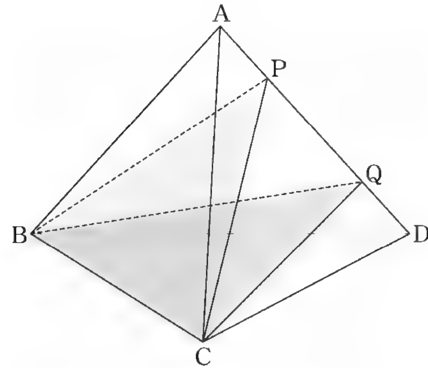


10.

2015년 10월 교육청 B형 26번

한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 선분 AD를 1 : 3으로 내분하는 점을 P, 3 : 1로 내분하는 점을 Q라 하자. 두 평면 PBC와 QBC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]





11.

2016학년도 수능 B형 27번

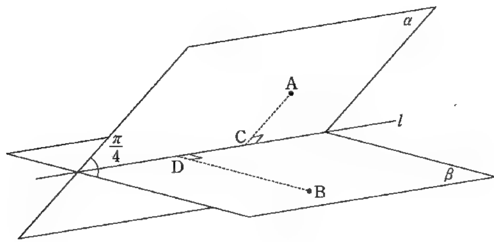
좌표공간에 서로 수직인 두 평면 α와 β가 있다. 평면 α 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = 3\sqrt{5}$이고 직선 AB는 평면 β에 평행하다. 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고, 평면 β 위의 점 P와 평면 α 사이의 거리는 4일 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오. [4점]



12.

2017학년도 9월 평가원 가형 29번

그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이다.) [4점]

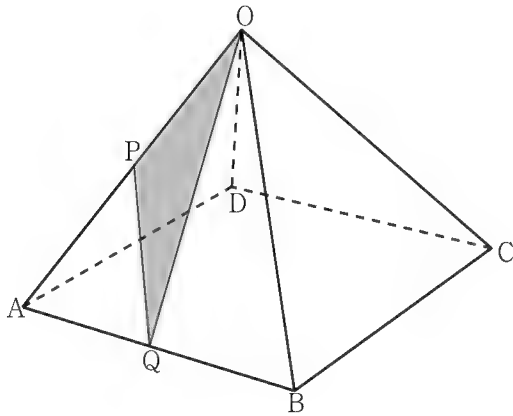




13.

2017년 7월 교육청 가형 14번

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형을 밑면으로 하고 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=2\sqrt{5}$인 정사각뿔 O − ABCD가 있다. 두 선분 OA, AB의 중점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 평면 OCD 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



① $\frac{1}{2}$　　② $\frac{3}{4}$　　③ 1

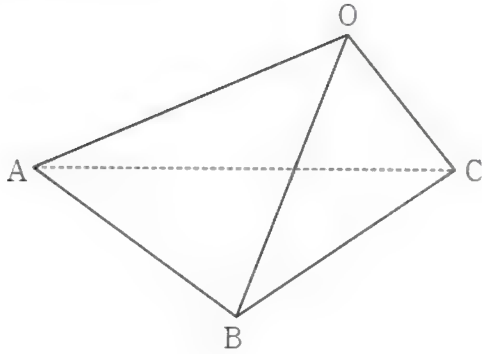
④ $\frac{5}{4}$　　⑤ $\frac{3}{2}$



14.

2018년 7월 교육청 가형 17번

사면체 OABC 에서 $\overline{OC}=3$ 이고 삼각형 ABC 는 한 변의 길이가 6 인 정삼각형이다. 직선 OC 와 평면 OAB 가 수직일 때, 삼각형 OBC 의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

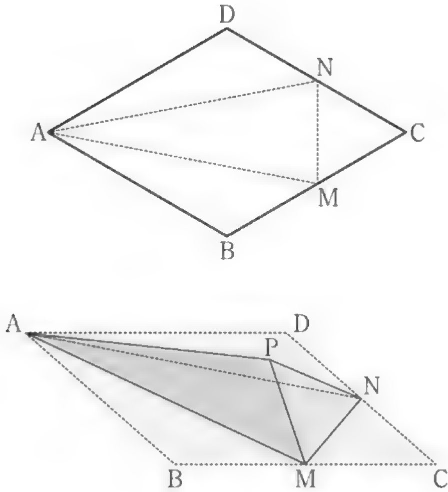
④ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{4}$



15.

2020학년도 수능 가형 27번

그림과 같이 한 변의 길이가 4이고 $\angle \mathrm{BAD} = \frac{\pi}{3}$인 마름모 ABCD 모양의 종이가 있다. 변 BC와 변 CD의 중점을 각각 M과 N이라 할 때, 세 선분 AM, AN, MN을 접는 선으로 하여 사면체 PAMN이 되도록 종이를 접었다. 삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, 종이의 두께는 고려하지 않으며 P는 종이를 접었을 때 세 점 B, C, D 가 합쳐지는 점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

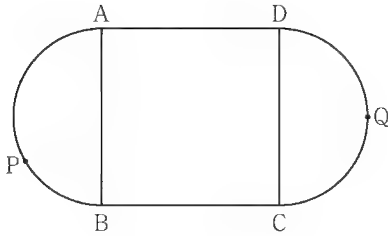


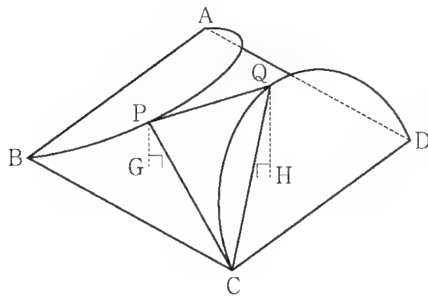


16.

2022학년도 9월 평가원 29번

그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자.
이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]







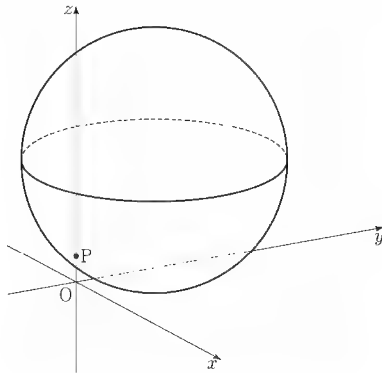
17.

2022학년도 수능 30번

좌표공간에 중심 $C(2,\ \sqrt{5},\ 5)$이고 점 $P(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 구

$$S:\ (x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2+(z-5)^2=25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1이라 하자. 삼각형 OQ_1R_1의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 OQ_1R_1의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





18.

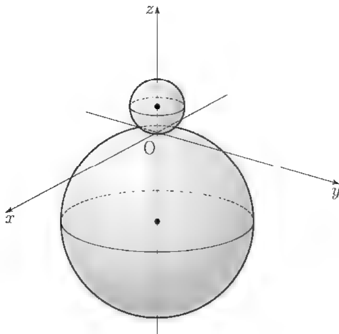
2023학년도 9월 평가원 29번

좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4,$$
$$S_2 : x^2 + y^2 + (z+7)^2 = 49$$

가 있다. 점 $\mathrm{A}(\sqrt{5},\ 0,\ 0)$을 지나고 zx평면에 수직이며, 구 S_1과 z좌표가 양수인 한 점에서 접하는 평면을 α라 하자. 구 S_2가 평면 α와 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 z좌표가 최소인 점을 B라 하고 구 S_2와 점 B에서 접하는 평면을 β라 하자.

원 C의 평면 β 위로의 정사영의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



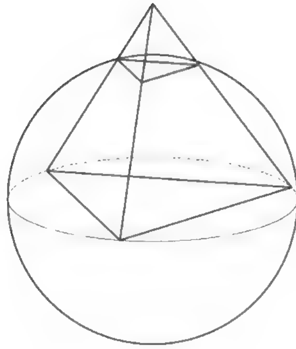


19.

2023학년도 수능 30번

좌표공간에 정사면체 ABCD가 있다. 정삼각형 BCD의 외심을 중심으로 하고 점 B를 지나는 구를 S라 하자.
구 S와 선분 AB가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P,
구 S와 선분 AC가 만나는 점 중 C가 아닌 점을 Q,
구 S와 선분 AD가 만나는 점 중 D가 아닌 점을 R라 하고, 점 P에서 구 S에 접하는 평면을 α라 하자.
구 S의 반지름의 길이가 6일 때, 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오.

[4점]

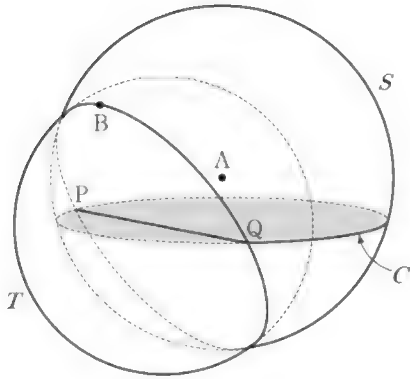




20.

2024학년도 9월 평가원 28번

좌표공간에 중심이 A$(0,0,1)$이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 있다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하고, 점 A에서 선분 PQ까지의 거리가 2가 되도록 원 C 위에 두 점 P, Q를 잡는다. 구 S가 선분 PQ를 지름으로 하는 구 T와 만나서 생기는 원 위에서 점 B가 움직일 때, 삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? (단, 점 B의 z좌표는 양수이다.) [4점]



① 6 ② $3\sqrt{6}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

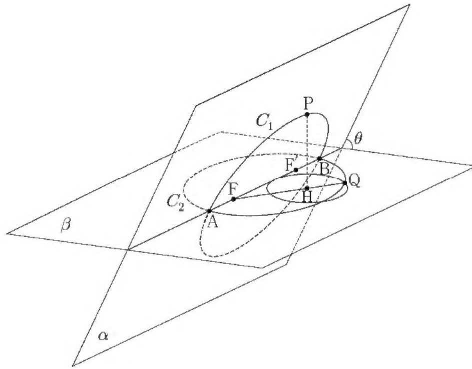


21.

2024학년도 수능 28번

그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=18$인 두 점 A, B가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1이 평면 α 위에 있고, 선분 AB를 장축으로 하고 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 C_2가 평면 β 위에 있다. 원 C_1 위의 한 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{HF'}}<\overline{\mathrm{HF}}$이고 $\angle \mathrm{HFF'}=\frac{\pi}{6}$이다. 직선 HF와 타원 C_2가 만나는 점 중 점 H와 가까운 점을 Q라 하면, $\overline{\mathrm{FH}}<\overline{\mathrm{FQ}}$이다.
점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원은 반지름의 길이가 4이고 직선 AB에 접한다.
두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 P는 평면 β 위에 있지 않다.)

[4점]



① $\frac{2\sqrt{66}}{33}$　② $\frac{4\sqrt{69}}{69}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$　④ $\frac{4\sqrt{3}}{15}$　⑤ $\frac{2\sqrt{78}}{39}$

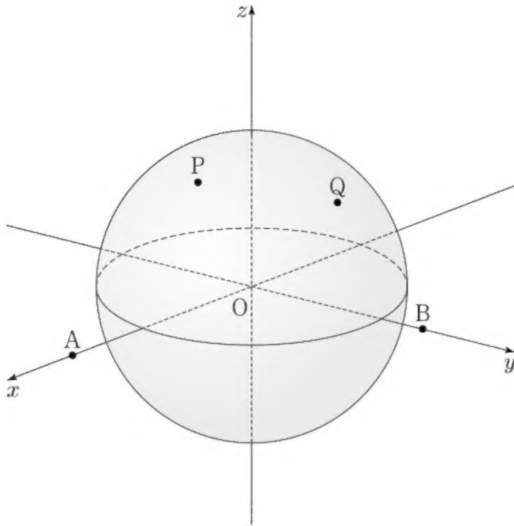


22.

2025학년도 9월 평가원 28번

좌표공간에 두 점 $\mathrm{A}(a, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 10\sqrt{2}, 0)$과 구 $S : x^2+y^2+z^2=100$이 있다. $\angle \mathrm{APO}=\frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형을 C_1, $\angle \mathrm{BQO}=\frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 Q가 나타내는 도형을 C_2라 하자. C_1과 C_2가 서로 다른 두 점 N_1, N_2에서 만나고 $\cos(\angle \mathrm{N}_1\mathrm{O}\mathrm{N}_2)=\frac{3}{5}$일 때, a의 값은? (단, $a>10\sqrt{2}$이고, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{10}{3}\sqrt{30}$ ② $\frac{15}{4}\sqrt{30}$ ③ $\frac{25}{6}\sqrt{30}$ ④ $\frac{55}{12}\sqrt{30}$ ⑤ $5\sqrt{30}$



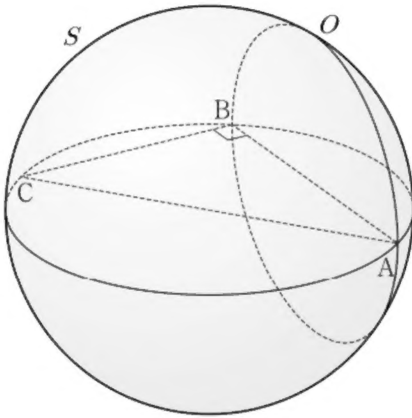


23.

2025학년도 수능 28번

좌표공간에 $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$, $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 와 선분 AC 를 지름으로 하는 구 S가 있다. 직선 AB 를 포함하고 평면 ABC 에 수직인 평면이 구 S와 만나서 생기는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 중에서 직선 AC 까지의 거리가 4 인 서로 다른 두 점을 P , Q 라 할 때, 선분 PQ 의 길이는? [4점]

① $\sqrt{43}$ ② $\sqrt{47}$ ③ $\sqrt{51}$
④ $\sqrt{55}$ ⑤ $\sqrt{59}$





빠른 정답

기하 이차곡선

1	③	2	8	3	180	4	128	5	105
6	5	7	12	8	④	9	⑤	10	③
11	22	12	12	13	①	14	29	15	116
16	54	17	8	18	14	19	③	20	80
21	①	22	⑤	23	①	24	23	25	①
26	②	27	80	28	17	29	11	30	25
31	63	32	107						

기하 평면벡터

1	⑤	2	⑤	3	④	4	17	5	7
6	②	7	19	8	①	9	⑤	10	⑤
11	③	12	53	13	③	14	48	15	①
16	50	17	⑤	18	48	19	45	20	100
21	8	22	17	23	12	24	⑤	25	13
26	27	27	147	28	③	29	10	30	54
31	316								

기하 공간도형과 공간좌표

1	27	2	45	3	7	4	40	5	⑤
6	④	7	②	8	④	9	162	10	16
11	15	12	12	13	③	14	④	15	8
16	40	17	23	18	127	19	24	20	①
21	⑤	22	①	23	④				